Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A del Modelo 3 junio de 2000.

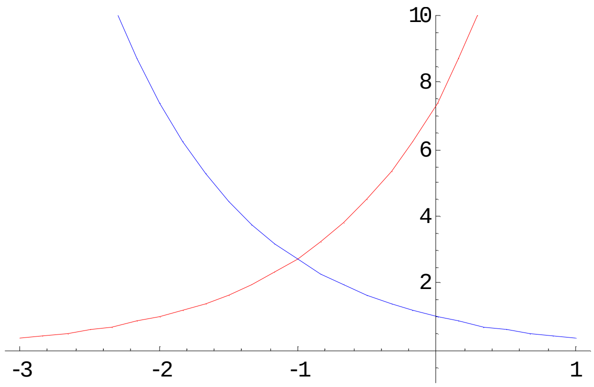
(a) [1 punto] Dibuja el recinto limitado por las curvas $y=e^{x+2}$, $y=e^{-x}$ y $x=0$

(b) [1'5 puntos] Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

Solución

(a)

La gráfica de e^{x+2} (de color rojo) es la misma que la de e^x pero desplazada dos unidades a la izquierda. La gráfica de e^{-x} (de color azul) es la misma que la de e^x pero simétrica respecto al eje OY.



(b)

Para determinar el área encerrada por las dos funciones y la recta x = 0, necesitamos el punto de corte de ambas funciones, para lo cual las igualamos $e^{-x} = e^{x+2}$, operando obtenemos $1 = e^{2x+2} = e^0$, de donde $2x+2 = 0$ y sale $x = -1$.

$$\text{Area}=\int_{-1}^{0}(e^{x+2}-e^{-x})dx=\left[e^{x+2}+e^{-x}\right]_{-1}^{0}=(e^2+e^0)-(e^1+e^1)=e^2-2e+1 \quad \text{u.a.}$$

Ejercicio 2 de la Opción A de junio de 2000.

Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde un determinado punto. La altura en metros alcanzada al cabo de *t* segundos, viene dada por $h(t)=5-5t-5e^{-2t}$

(a) [1'5 puntos] Calcula el tiempo transcurrido hasta alcanzar la altura máxima y el valor de ésta.

(b) [1 punto] Teniendo en cuenta que la velocidad es v(t)=h'(t), halla la velocidad al cabo de 2 segundos.

Solución

(a)

El máximo se obtiene resolviendo h'(t)=0 y después sustituiremos

$h'(t)=-5-5e^{-2t}(-2)=-5+10e^{-2t}$

$h'(t)=0$, es $-5+10e^{-2t} = 0$, de donde $e^{-2t} = ½$, es decir por recíproca $-2t = \ln(1/2)$ de donde

$t=\ln(\sqrt{2})$

Sustituyendo se obtiene

$$h(\ln\sqrt{2})=5-5\ln\sqrt{2}-5e^{-2\ln\sqrt{2}}=5-5\ln\sqrt{2}-\frac{5}{(\sqrt{2})^2}\cong 0'767 \quad \text{m.}$$

(b)

$v(t)=h'(t)=-5+10^{-2t}$. Sustituyendo t=2 obtenemos

$v(2)=-5+10^{-4}\cong -4'9999\ m/s^2$.

Ejercicio 3 de la Opción A de junio de 2000.

[1'5 puntos] Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A=(1,6) y B=5,2) y tiene su centro sobre la recta y=2x

Solución

La ecuación de una circunferencia es de la forma $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$, que desarrollándola se transforma en $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ con $c=a^2+b^2-r^2$. siendo C(a,b) el centro de la circunferencia y r el radio de ella.

Como el centro (a,b) está en la recta y = 2x, tenemos la ecuación b=2a.

Como pasa por los puntos (1,6) y (5,2).entrando con estos puntos en la ecuación de la circunferencia se obstinen las siguientes ecuaciones:

$1+36-2a-12b+c = 0$

$25+4-10a-4b+c = 0$

Resolviendo las tres ecuaciones con tres incógnitas obtenemos a=1, b=2 y c=-11, por tanto

$r=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{1+4+11}=\sqrt{16}=4$

luego la circunferencia pedida es $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4^2$.

Ejercicio 4 de la Opción A de junio de 2000.-

[1'5 puntos] Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcula $(A^tA^{-1})^2A$.

Solución

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2 \neq 0$, luego exite $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}Adj(A^t)$

$Adj(A^t)=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, por tanto $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}Adj(A^t)=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$A^t.A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\dfrac{-1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

$(A^t.A^{-1})^2=\dfrac{-1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.\dfrac{-1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 21 & -5 \\ 20 & -4 \end{pmatrix}$, resultando

$(A^t.A^{-1})^2.A=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 21 & -5 \\ 20 & -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 22 \\ 8 & 24 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/2 & 11/2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Opción B

Ejercicio 1 de la Opción B de junio de 2000.

[2'5 puntos] Se dispone de 2888.000 pts. Para vallar un terreno rectangular colindante con un camino recto. Si el precio de la valla que ha de ponerse en el lado del camino es de 800 pts/metro y el de la valla de los restantes lados es de 100 pts/metro, ¿cuáles son las dimensiones y el área del terreno rectangular de área máxima que se puede vallar?

Solución

La función a maximizar es A=x.y, con la relación x.800+(y+y+x).100 = 288000. Operando resulta 9x + 2y = 288, de donde

$y=\dfrac{2880-9x}{2}$, y la función a maximizar es

$A=x.y=x.\left(\dfrac{2880-9x}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(2880x-9x^2)$, derivando $A' = (1/2)(2880 - 18x)$.

A' = 0, nos da 2880 –18x = 0, de donde x = 160.

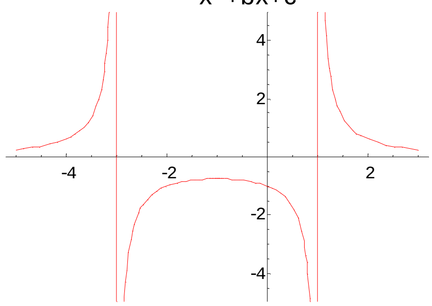
Como A'' = -9 < 0, es un máximo

$y=\dfrac{2880-9.(160)}{2}=720$

Por tanto es un rectángulo de lados x = 160 m. e y = 720 m.

Ejercicio 2 de la Opción B de junio de 2000.

[2'5 puntos] Determina a, b y c para que la curva $y=\dfrac{a}{x^2+bx+c}$ sea la siguiente



Solución

De la figura se observa que f(-2) = -1, y que las rectas x = -3 y x = 1 son asíntotas verticales
De f(-2) = -1, obtenemos

$-1=\dfrac{a}{4-2b+c}$, y operando tenemos a=-4+2b-c

Como x = 1 es asíntota vertical tenemos

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{a}{x^2+bx+c}\right)=\dfrac{a}{1+b+c}=+\infty$, de donde 1+b+c=0

Análogamente como x = -3 es asíntota vertical tenemos

$\lim\limits_{x\to -3^-}\left(\dfrac{a}{x^2+bx+c}\right)=\dfrac{a}{9-3b+c}=+\infty$, de donde 9-3b+c=0

Resolviendo el sistema $\begin{cases} a=-4+2b-c \\ 1+b+c=0 \\ 9-3b+c=0 \end{cases}$ se obtiene a = 3, b = 2 y c = -3, con la cual la función pedida es

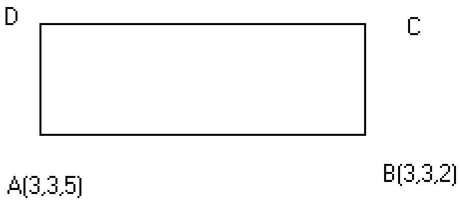
$y=\dfrac{3}{x^2+2x-3}$

Ejercicio 3 de la Opción B de junio de 2000.

Los puntos A=(3,3,5) y B=(3,3,2) son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. El vértice C consecutivo de B está en la recta de ecuaciones $x=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$

(a) [1'75 puntos] Determina el vértice C. (b) [0'75 puntos] Determina el vértice D.

Solución



El punto C pertenece a la recta r dada, es decir:

$C\in r\equiv\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z+1}{2}=\lambda$, que en paramétricas sería $\begin{cases} x=\lambda \\ y=6-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases}$

luego sus coordenadas serán C(λ,6-λ,-1+2λ).

Como tenemos un rectángulo AB ⊥ BC, por tanto $\vec{AB}\cdot\vec{BC}=0$

$\vec{AB}=(0,0,-3)$; $\vec{BC}=(-3+\lambda,3-\lambda,-3+2\lambda)$

$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=0$ =9 - 6λ, de donde λ = 3/2

(a)

Las coordenadas de C serían (3/2, 6 – 3/2, -1 + 2.3/2) = (3/2 , 9/2 , 2)

(b)

El punto medio de la diagonal AC coincide con el punto medio de la diagonal DB, luego

$\left(\dfrac{3+3/2}{2},\dfrac{3+9/2}{2},\dfrac{5}{2}\right)=\left(\dfrac{x+3}{2},\dfrac{y+3}{2},\dfrac{z+2}{2}\right)$ Con lo cual las coordenadas del punto D serían

D(x,y,z) = (3/2 , 9/2 , 5)

Ejercicio 4 de la Opción B de junio de 2000.

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Halla todos los valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa

(b) [1'5 puntos] Tomando λ=1, resuelve el sistema escrito en forma matricial $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solución

(a)

Si det(A) = $|A|$ = 0, la matriz A no tiene inversa

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $1(\lambda-0)-2(\lambda^2-0)+1(\lambda-0) = \lambda - 2\lambda^2 + \lambda = 2\lambda - 2\lambda^2 = 0$, de donde $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ para que no exista A^{-1}.

(b)

si $\lambda = 1$, el sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y como det(A) = 0, Tenemos que el sistema es compatible e indeterminado con dos ecuaciones y dos incógnitas principales.

Tomo la segunda y tercera ecuación que serían:

$x + y = 0$

$y + z = 0$, tomando $z = m$ tenemos $y = -m$ y $x = m$, con lo cual la solución del sistema es $(x,y,z) = (m,-m,m)$ con $m \in \Re$